

**ΑΠΟΣΤΟΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΙΔΗ
ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ**

**ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΑ ΚΤΙΡΙΑ
από οπλισμένο σκυρόδεμα**

ΤΟΜΟΣ Β΄

Στατική και Σεισμική Ανάλυση

ISBN set 978-960-85506-6-7
ISBN τ. Β΄ 978-960-85506-0-5

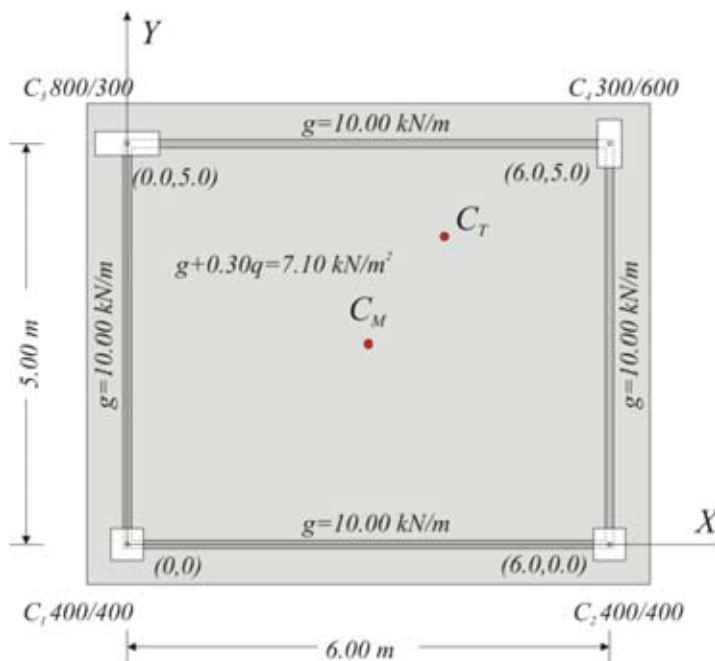
Copyright: Απόστολος Κωνσταντινίδης
Αλέκτορος 7, ΤΚ 116 32, ΑΘΗΝΑ

Ο νόμος 2121/93 κατοχυρώνει την πνευματική ιδιοκτησία και απαγορεύει την αναπαραγωγή με κάθε τρόπο ή μέσο, όλου ή τμήματος του έργου χωρίς τη γραπτή άδεια του συγγραφέα.

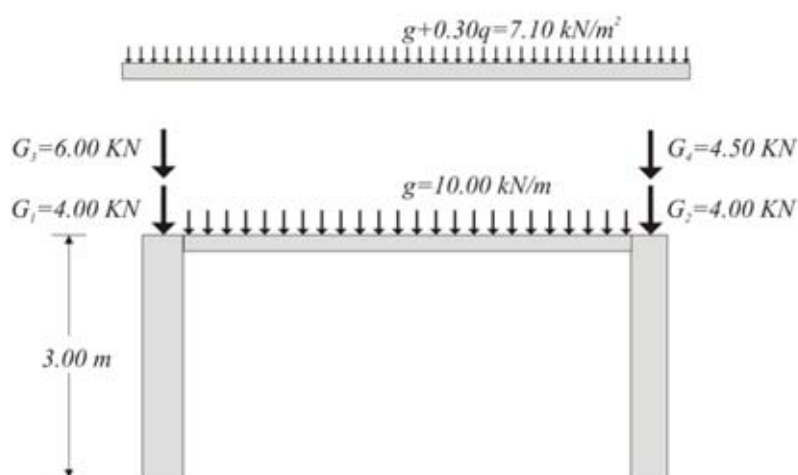
5.3 Χωρικά πλαίσια

5.3.1 Διαφραγματική λειτουργία

Οι πλάκες στο σκελετό ενός ορόφου δημιουργούν ένα ισχυρό οριζόντιο στοιχείο, το διάφραγμα. Αυτό είναι πρακτικά άκαμπτο και απαραμόρφωτο, οπότε υποχρεώνει τις δοκούς και τις κεφαλές των υποστυλωμάτων να κινηθούν με βάση αυτό τον κανόνα.



Απλό παράδειγμα ορόφου με 4 υποστυλώματα που καταλήγουν σε άκαμπτη πλάκα-διάφραγμα.



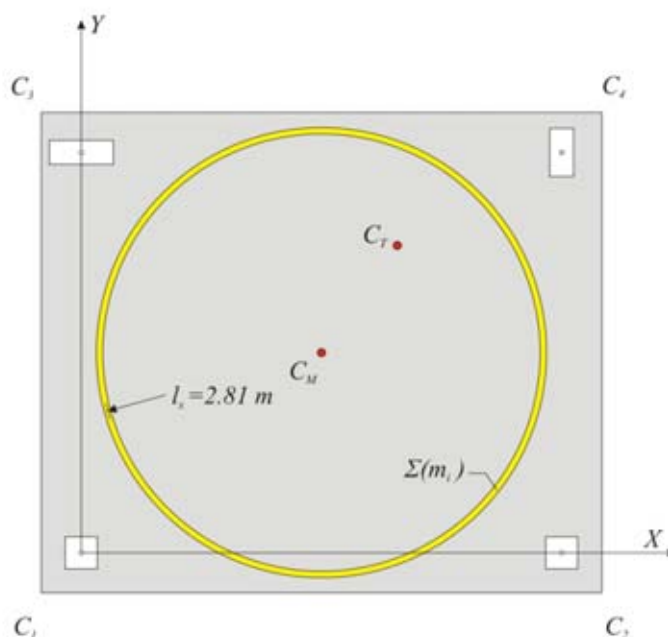
Φορτιστικό Προσομοίωμα

Στην περίπτωση του σεισμού, που οι κύριες εντάσεις προκύπτουν από οριζόντιες σεισμικές δυνάμεις, η διαφραγματική λειτουργία έχει καθοριστική σημασία στη λειτουργία του σκελετού.

Στη συνέχεια αναπτύσσεται η διαφραγματική λειτουργία, που αφορά κατασκευές κάθε τύπου και μεγέθους, σαν παράδειγμα όμως χρησιμοποιείται η απλή τετράστυλη κατασκευή που φαίνεται στην εικόνα κάτω.

5.3.2 Κέντρο μάζας και ακτίνα αδράνειας

Η αδρανειακή συμπεριφορά της μάζας $\Sigma(m_i)$ ενός διαφράγματος μπορεί να περιγραφεί από την ισοδύναμη αδρανειακά κατανομή της μάζας σε ένα δακτύλιο με συνολική μάζα $\Sigma(m_i)$ που έχει κέντρο το **Κέντρο Μάζας** C_M και ακτίνα την **Ακτίνα Αδράνειας** I_s .



Το κέντρο μάζας C_M και ο ισοδύναμος δακτύλιος αδράνειας της μάζας με ακτίνα I_s

Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας C_M ενός διαφράγματος με πολλές μάζες σημειακές, γραμμικά διανεμημένες, επιφανειακά διανεμημένες, προκύπτουν από τις σχέσεις:

$$X_{CM} = \frac{\sum(X_i \cdot m_i)}{\sum(m_i)}, \quad Y_{CM} = \frac{\sum(Y_i \cdot m_i)}{\sum(m_i)} \quad (1)$$

Η ακτίνα αδράνειας I_s του διαφράγματος ως προς το κέντρο μάζας C_M προκύπτει από τη σχέση:

$$I_s = \sqrt{\frac{\sum(I_{pi})}{\sum(m_i)}} \quad (2)$$

όπου x_i και y_i είναι οι συντεταγμένες του κέντρου κάθε μάζας m_i του διαφράγματος, ενώ I_{pi} είναι η πολική ροπή αδράνειας κάθε μάζας m_i ως προς το κέντρο μάζας C_M .

Υπενθυμίζεται από τη μηχανική των υλικών ότι, ανάλογα με τον τρόπο διανομής μιας μάζας m που το κέντρο της απέχει απόσταση L από το κέντρο μάζας C_M του διαφράγματος, είναι:

- Για σημειακή μάζα: $I_p = m \cdot L^2$
- Για γραμμικά διανεμημένη μάζα σε μήκος l : $I_p = m \cdot (l^2/12 + L^2)$
- Για επιφανειακά διανεμημένη μάζα σε ορθογώνιο διαστάσεων b, l : $I_p = m \cdot [(b^2 + l^2)/12 + L^2]$
- Για επιφανειακά διανεμημένη μάζα σε τρίγωνο ή κυκλικό τμήμα: υπολογίζεται η ισοδύναμη κύρια ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας του συγκεκριμένου τμήματος και προστίθεται ο όρος $m \cdot L^2$ του Steiner.

Παρατήρηση

- σε μεγάλες κατόψεις, η ακτίνα αδράνειας μπορεί να υπολογιστεί μόνο από τις αντιδράσεις των δοκών επί των κολονών του ορόφου, ενώ στην περίπτωση που τα επιμέρους γραμμικά φορτία π.χ. των τοίχων, είναι διανεμημένα ομοιόμορφα σε όλη την κάτοψη, θα μπορούσε η ακτίνα αδράνειας να υπολογιστεί από τον τύπο $I_s = \sqrt{\frac{L_x^2 + L_y^2}{12}}$ όπου L_x, L_y είναι οι διαστάσεις της κάτοψης.

Παράδειγμα:

Κέντρο Μάζας:

Λόγω συμμετρικής κατανομής των μαζών, λαμβάνεται $X_{CM} = 3.0 \text{ m}$ και $Y_{CM} = 2.5 \text{ m}$.

Ακτίνα αδράνειας: [Λαμβάνεται $g = 10 \text{ m/sec}^2$, οπότε δύναμη $F = 1 \text{ kN}$ αντιστοιχεί σε μάζα $m = 0.1 \text{ t}$]

Πλάκα: $m_1 = 6.0 \text{ m} \cdot 5.0 \text{ m} \cdot 0.71 \text{ t/m}^2 = 21.3 \text{ t}$,

$b_1 = 6.0 \text{ m}$, $l_1 = 5.0 \text{ m}$, $L_1 = 0.0 \text{ m} \rightarrow I_{p1} = 21.3 \text{ t} \cdot (6.0^2 + 5.0^2) \text{ m}^2 / 12 = 108.3 \text{ t} \cdot \text{m}^2$

Δοκός μεταξύ $C_1 - C_2$: $m_2 = 6 \text{ m} \cdot 1.0 \text{ t/m} = 6.0 \text{ t}$, $l_2 = 6.0 \text{ m}$, $L_2 = 2.5 \text{ m} \rightarrow I_{p2} = 6.0 \cdot (6^2/12 + 2.5^2) = 55.5 \text{ t} \cdot \text{m}^2$

Δοκός μεταξύ $C_3 - C_4$: ομοίως $m_3 = 6.0 \text{ t}$, $I_{p3} = 55.5 \text{ t} \cdot \text{m}^2$

Δοκός μεταξύ $C_1 - C_3$: $m_4 = 5.0 \text{ m} \cdot 1.0 \text{ t/m} = 5.0 \text{ t}$, $l_4 = 5.0$, $L_4 = 3.0 \text{ m} \rightarrow I_{p4} = 5.0 \cdot (5.0^2/12 + 3.0^2) = 55.4 \text{ t} \cdot \text{m}^2$

Δοκός μεταξύ $C_2 - C_4$: ομοίως $m_5 = 5.0 \text{ t}$, $I_{p5} = 55.4 \text{ t} \cdot \text{m}^2$

Υποστυλώματα: $m_6 = 0.1 \cdot (4.00 + 4.00 + 6.0 + 4.5) = 1.85 \text{ t}$, $L_6 = \sqrt{(3.0^2 + 2.5^2)} = 3.905 \text{ m}$, $\rightarrow I_{p6} = 1.85 \cdot 3.905^2 = 28.2 \text{ t} \cdot \text{m}^2$.

Τελικά $\Sigma(m_i) = 45.3 \text{ t}$ και $\Sigma(I_{pi}) = 358.3 \text{ t} \cdot \text{m}^2$ (2) $\rightarrow I_s = \sqrt{(\Sigma(I_{pi})/\Sigma(m_i))} = \sqrt{(358.3/45.3)} = 2.81 \text{ m}^2$

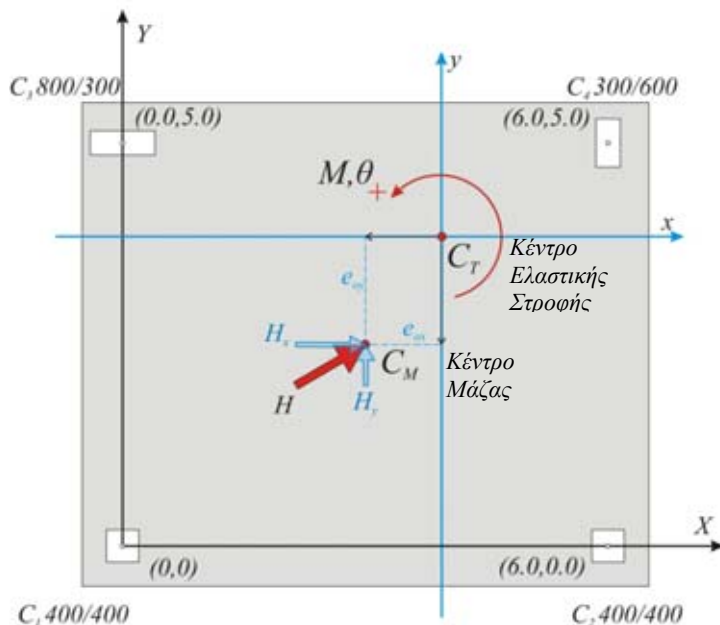
¹ Έχει ληφθεί υπόψη και το ίδιο βάρος των υποστυλωμάτων με την θεώρηση ότι το ένα τρίτο του φορτίου αναλογεί στο διάφραγμα των κεφαλών και τα 2/3 στο διάφραγμα της βάσης. Τα φορτία (και οι αντίστοιχες μάζες) στις κεφαλές των υποστυλωμάτων είναι $G_1 = 4.0 \text{ kN}$, $G_2 = 4.0 \text{ kN}$, $G_3 = 6.0 \text{ kN}$ και $G_4 = 4.50 \text{ kN}$, που έχουν ως συνέπεια μία ελάχιστη απόκλιση του Κέντρου Μάζας, δηλαδή χωρίς πρακτική διαφορά από το γεωμετρικό κέντρο βάρους. Πολύ μικρές διαφορές προκύπτουν επίσης αν ληφθούν υπόψη και οι μικρές διαφοροποιήσεις των φορτίων (μαζών) του μήκους των οπτοπλινθοδομών, λόγω διαφοροποίησης των διαστάσεων των κολονών, αλλά και η προέκταση των πλακών (που έχουν σχεδιαστεί έτσι για εποπτικούς λόγους).

² Αν τα ίδια φορτία ήταν ομοιόμορφα διανεμημένα στην κάτοψη θα ήταν $I_s = \sqrt{[(L_x^2 + L_y^2)/12]} = \sqrt{[(6.0^2 + 5.0^2)/12]} = 2.25 \text{ m}$

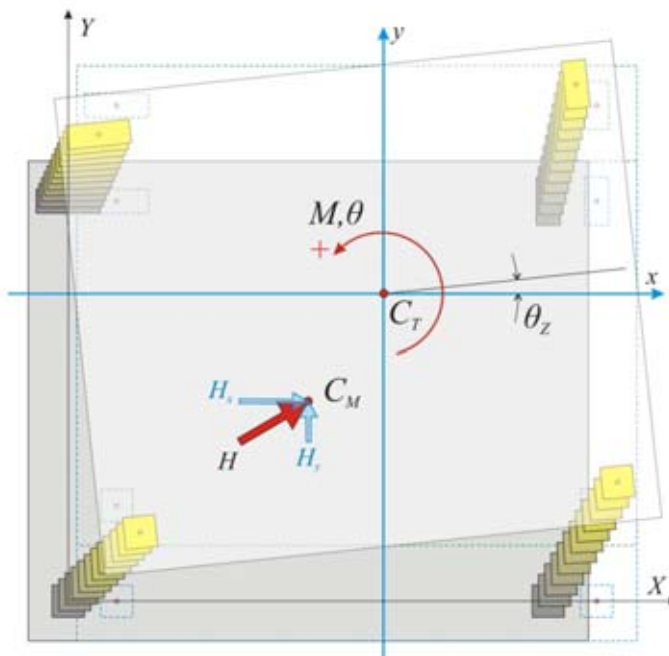
5.3.3 Κέντρο ελαστικής στροφής και ελαστικές μετακινήσεις διαφράγματος

Εδώ θα εξεταστεί η περίπτωση ορθογωνικών κολονών σε παράλληλη διάταξη. Η γενική περίπτωση αναλύεται στο Παράρτημα Α.

5.3.3.1 Περιγραφή του θέματος



Απλό παράδειγμα ορόφου με 4 υποστυλώματα που καταλήγουν σε άκαμπτη πλάκα-διάφραγμα.



Παράλληλη μετατόπιση προς τις δύο διευθύνσεις και στροφή, του διαφράγματος, λόγω της δύναμης H

(xOy αρχικό σύστημα συντεταγμένων $xCTy$ κύριο σύστημα συντεταγμένων)

Γενικά, κατά την οριζόντια ώθηση H ενός ορόφου, λόγω της ύπαρξης της πλάκας που στο επίπεδο της είναι πρακτικά άκαμπτη, όλα τα σημεία, άρα και οι κεφαλές των κολονών³ επί της πλάκας θα κινηθούν με τον ίδιο κανόνα.

Ο κανόνας αυτής της κίνησης είναι ότι το διάφραγμα θα έχει μία παράλληλη (μεταφορική) μετατόπιση κατά δ_{x_0} , δ_{y_0} και μία περιστροφή θ_z πέριξ ενός σημείου $C_T(x_{CT}, y_{CT})$ που ονομάζεται **πόλος περιστροφής**, στο σύστημα $x_C y_C$, που έχει αρχή των αξόνων το σημείο C_T παράλληλο⁴ προς το αρχικό σύστημα XOY .

Η διαφραγματική λειτουργία μπορεί να εξετασθεί ως επαλληλία τριών καταστάσεων:

(α) παράλληλη μετατόπιση του διαφράγματος κατά X λόγω οριζόντιας συνιστώσας δύναμης H_x ,

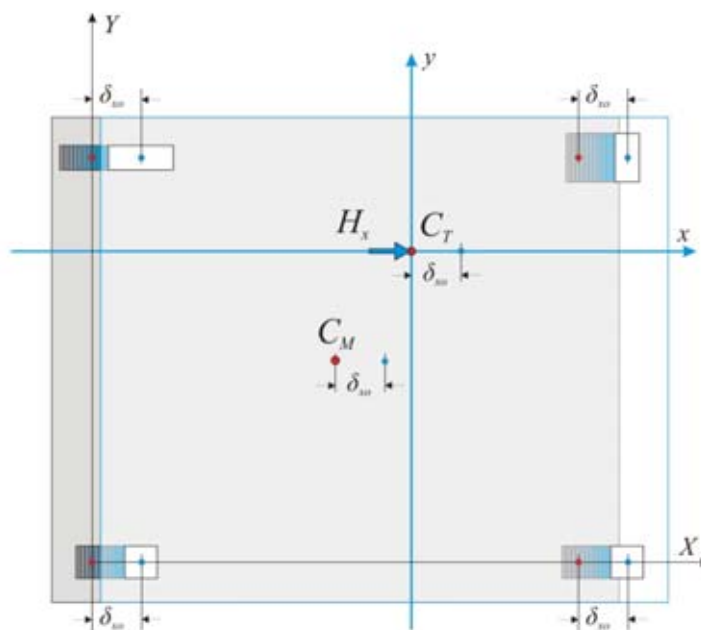
(β) παράλληλη μετατόπιση του διαφράγματος κατά Y λόγω οριζόντιας συνιστώσας H_y και

(γ) στροφή του διαφράγματος λόγω της ροπής M_{CT} που εξασκείται στον πόλο περιστροφής C_T .

Οι οριζόντιες σεισμικές δυνάμεις εξασκούνται σε κάθε σημείο που υπάρχει μάζα, αλλά η συνισταμένη δύναμη εξασκείται στο κέντρο μάζας C_M .

Σε περίπτωση που η κατεύθυνση της δύναμης H διέρχεται εκτός από το σημείο C_M και από το σημείο C_T , η ροπή είναι μηδενική και επομένως το διάφραγμα δεν έχει στροφή.

5.3.3.2 Μετατόπιση του πόλου περιστροφής C_T κατά τη διεύθυνση x κατά δ_{x_0} :



Παράλληλη μετατόπιση κατά x λόγω της δύναμης H_x

³ Στη συνέχεια θα χρησιμοποιείται ο όρος 'κολόνα' που θα περιλαμβάνει τους όρους υποστύλωμα και τοιχίο.

⁴ Στη γενική περίπτωση, δηλαδή στη περίπτωση που υπάρχουν κολόνες που οι τοπικοί κύριοι άξονες τους είναι υπό κλίση ως προς το αρχικό σύστημα XOY , το κύριο σύστημα έχει γωνία κλίσης $\alpha \neq 0^\circ$ ως προς το αρχικό σύστημα (βλέπε παράρτημα Α). Συνεπώς στο σύστημα των ορθογωνικών κολονών σε παράλληλη διάταξη, $K_x=K_x$, $V_x=V_x$, $K_{xy}=K_{xy}=0$, που σημαίνει ότι μία οριζόντια δύναμη που εξασκείται στο κέντρο ελαστικής στροφής κατά τη διεύθυνση x δίνει μετατόπιση μόνο κατά x και το ίδιο συμβαίνει κατά τη διεύθυνση y .

Για εξάσκηση οριζόντιας δύναμης H_x επί του C_T κατά x θα πρέπει να ισχύουν οι 2 παρακάτω εξισώσεις ισορροπίας:

- Το άθροισμα των δυνάμεων κατά τη διεύθυνση x θα πρέπει να είναι ίσο με H_x , δηλαδή $H_x = \Sigma(V_{xoi})$ (i),
- Το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων V_{xoi} ως προς το σημείο C_T θα είναι ίσο με το μηδέν, δηλαδή $\Sigma(V_{xoi} \cdot y_i) = 0$ (ii)

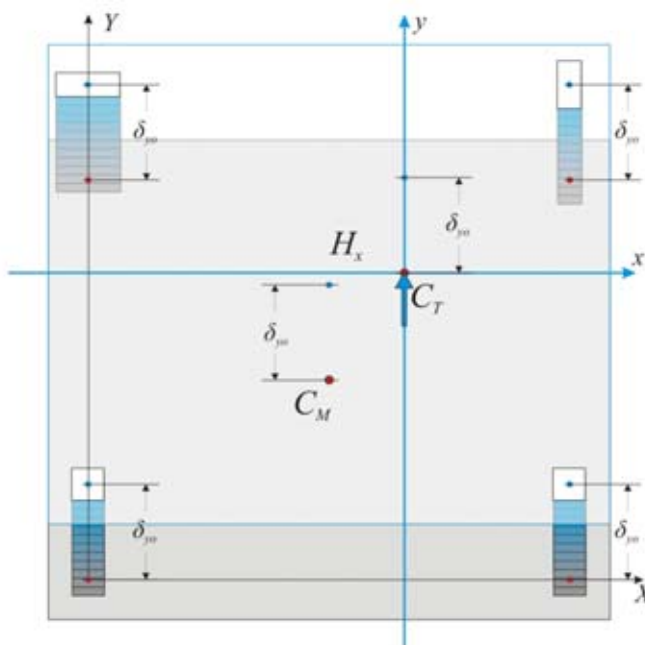
Η κάθε κολόνα i αναλαμβάνει τέμνουσα δύναμη $V_{xoi} = \delta_{xo} \cdot K_{xi}$.

Είναι $\Sigma(V_{xoi}) = \Sigma(\delta_{xo} \cdot K_{xi}) = \delta_{xo} \cdot \Sigma(K_{xi})$ οπότε η (i) δίνει $H_x = \delta_{xo} \cdot \Sigma(K_{xi}) \rightarrow H_x = K_x \cdot \delta_{xo}$ όπου $K_x = \Sigma(K_{xi})$

Η (ii) δίνει $\Sigma(V_{xoi} \cdot [Y_i - Y_{CT}]) = 0 \rightarrow \Sigma(V_{xoi} \cdot Y_i) - \Sigma(V_{xoi} \cdot Y_{CT}) = 0 \rightarrow Y_{CT} \cdot \Sigma(V_{xoi}) = \Sigma(V_{xoi} \cdot Y_{CT}) \rightarrow$

$Y_{CT} = \Sigma(\delta_{xo} \cdot K_{xi} \cdot Y_i) / \Sigma(\delta_{xo} \cdot K_{xi}) \rightarrow Y_{CT} = \Sigma(K_{xi} \cdot Y_i) / \Sigma(K_{xi})$

5.3.3.3 Μετατόπιση του πόλου περιστροφής C_T κατά τη διεύθυνση y κατά δ_{yo} :



Παράλληλη μετατόπιση κατά y λόγω της δύναμης H_y

Με ανάλογο τρόπο προκύπτουν οι αντίστοιχοι τύποι για τη διεύθυνση y :

$H_y = K_y \cdot \delta_{yo}$ όπου $K_y = \Sigma(K_{yi})$ και $X_{CT} = \Sigma(K_{yi} \cdot X_i) / \Sigma(K_{yi})$

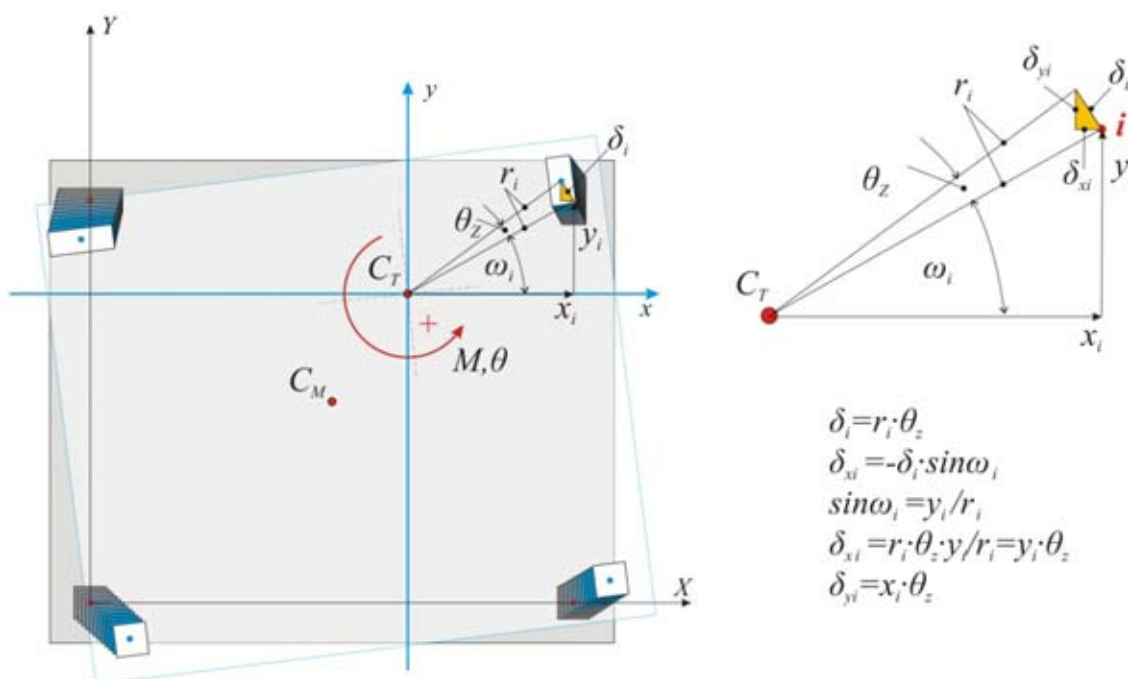
Άρα τελικά οι σχέσεις που δίνουν το κέντρο ελαστικής στροφής και τις μεταφορικές δυσκαμψίες είναι οι παρακάτω:

Κέντρο Ελαστικής Στροφής και Μεταφορικές Δυσκαμψίες:

$$X_{CT} = \frac{\Sigma(X_i \cdot K_{yi})}{\Sigma(K_{yi})}, \quad H_x = K_x \cdot \delta_{xo} \quad \text{όπου} \quad K_x = \Sigma(K_{xi}) \quad (4')$$

$$Y_{CT} = \frac{\Sigma(Y_i \cdot K_{xi})}{\Sigma(K_{xi})}, \quad H_y = K_y \cdot \delta_{yo} \quad \text{όπου} \quad K_y = \Sigma(K_{yi}) \quad (5')$$

5.3.3.4 Στροφή θ_z του διαφράγματος γύρω από το τον πόλο περιστροφής C_T



Μετατοπίσεις λόγω στροφής από ροπή M στο Κέντρο Ελαστικής Στροφής C_T

Εξετάζουμε την παραμόρφωση που δημιουργείται από εξωτερική ροπή M που εξασκείται στο κέντρο ελαστικής στροφής C_T . Για να εξετάσουμε αυτή τη κίνηση πρέπει να μεταφερθούμε από το αρχικό σύστημα XOY στο κύριο σύστημα $xCTy$ και για να γίνει αυτό χρειάζεται απλώς μία παράλληλη μεταφορά. Μεταφέροντας και το κέντρο μάζας στο κύριο σύστημα, έχουμε τις στατικές εκκεντρότητες e_{ox}, e_{oy} του C_M ως προς το C_T από τις σχέσεις:

Κύριο σύστημα συντεταγμένων:

$$x_i = X_i - X_{CT} , y_i = Y_i - Y_{CT} , e_{ox} = x_{CM} , e_{oy} = y_{CM} \quad (6')$$

Η παραμόρφωση του διαφράγματος είναι μία στροφή θ_z γύρω από το C_T . Η στροφή θ_z του διαφράγματος προκαλεί μετατόπιση δ_i στη κεφαλή κάθε υποστυλώματος i που έχει συντεταγμένες x_i, y_i ως προς το σύστημα συντεταγμένων με αρχή το C_T . Αν η απόσταση του σημείου i από το C_T είναι r_i , οι δύο συνιστώσες της (απειροστής) παραμόρφωσης δ_i είναι $\delta_{xi} = -\theta_z \cdot y_i$ και $\delta_{yi} = \theta_z \cdot x_i$

Οι μετατοπίσεις δ_{xi}, δ_{yi} δημιουργούν σε κάθε υποστύλωμα τέμνουσες V_{xi} και V_{yi} όπου

$$V_{xi} = K_{xi} \cdot \delta_{xi} = K_{xi} \cdot (-\theta_z \cdot y_i) \rightarrow V_{xi} = -\theta_z \cdot K_{xi} \cdot y_i \text{ και } V_{yi} = K_{yi} \cdot \delta_{yi} = K_{yi} \cdot (\theta_z \cdot x_i) \rightarrow V_{yi} = \theta_z \cdot K_{yi} \cdot x_i$$

Η συνισταμένη των ροπών όλων των τεμνουσών δυνάμεων V_{xi}, V_{yi} ως προς το κέντρο ελαστικής στροφής πρέπει να είναι ίση με την εξωτερική ροπή M_{CT} δηλαδή




$$M_{CT} = \Sigma(-V_{xi} \cdot y_i + V_{yi} \cdot x_i + K_{zi}) \rightarrow M_{CT} = \theta_z \cdot \Sigma(K_{xi} \cdot y_i^2 + K_{yi} \cdot x_i^2 + K_{zi})$$

⁵ Οι εκκεντρότητες e_{ox}, e_{oy} ονομάζονται στατικές επειδή εξαρτώνται μόνο από τη γεωμετρία του φορέα και καθόλου από την εξωτερική φόρτιση. Όπως θα δούμε παρακάτω στην §...., εκτός από τις στατικές εκκεντρότητες υπάρχουν και οι τυχαμικές εκκεντρότητες.

Δυστρεψία K_{zi} υποστυλώματος i :

Κατά την στροφή του διαφράγματος ανθίστανται οι κολόνες με την καμπτική δυσκαμψία τους κατά τους όρους $K_{xi} \cdot y_i^2$, $K_{yi} \cdot x_i^2$ (σε $N \cdot m$) αλλά και με την ίδια δυστρεψία τους K_{zi} , σε μονάδες ροπής π.χ. $N \cdot m$.

Η δυστρεψία ενός υποστυλώματος δίνεται από την σχέση $K_z = 0.5E \cdot I_d / h$ όπου $0.5E$ είναι το μέτρο διάτμησης G του υλικού που συνήθως λαμβάνεται ίσο με 0.5 του μέτρου ελαστικότητας του υλικού της κολόνας (βλέπε §4.1.1), h είναι το ύψος της κολόνας και I_d είναι η στρεπτική ροπή αδράνεια της διατομής. Το I_d μπορεί να λαμβάνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Μορφή διατομής	I_d
	$\frac{\pi \cdot d^4}{32}$
	$0.1404 \cdot a^4$
 b η μικρότερη πλευρά	$n \cdot b^3 \cdot d$ όπου το n λαμβάνεται από τον πιο κάτω τύπο $n = \frac{1}{3} \cdot [1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{d}{b} \cdot \tanh(\frac{\pi \cdot d}{2 \cdot b})]$

Παρατήρηση

- Η (ίδια) δυστρεψία των κολονών K_z είναι πολύ μικρή και συνήθως μπορεί να παραλείπεται.

Δυστρεψία του διαφραγματικού ορόφου:

$$M_{CT} = K_{\theta} \cdot \theta_z \quad \text{όπου} \quad K_{\theta} = \sum (K_{xi} \cdot y_i^2 + K_{yi} \cdot x_i^2 + K_{zi}) \quad (7')$$

Η ποσότητα K_{θ} ονομάζεται δυστρεψία του διαφράγματος (ή κατά μία άλλη λεκτική εκδοχή, στροφική δυσκαμψία του διαφράγματος) και έχει μονάδες $N \cdot m$, κατ' αναλογία με τις ποσότητες $K_x = \sum(K_{xi})$, $K_y = \sum(K_{yi})$ που ονομάζονται μεταφορικές δυσκαμψίες του διαφράγματος κατά τη διεύθυνση x και y αντίστοιχα και έχουν μονάδες N/m .

Ορισμοί:

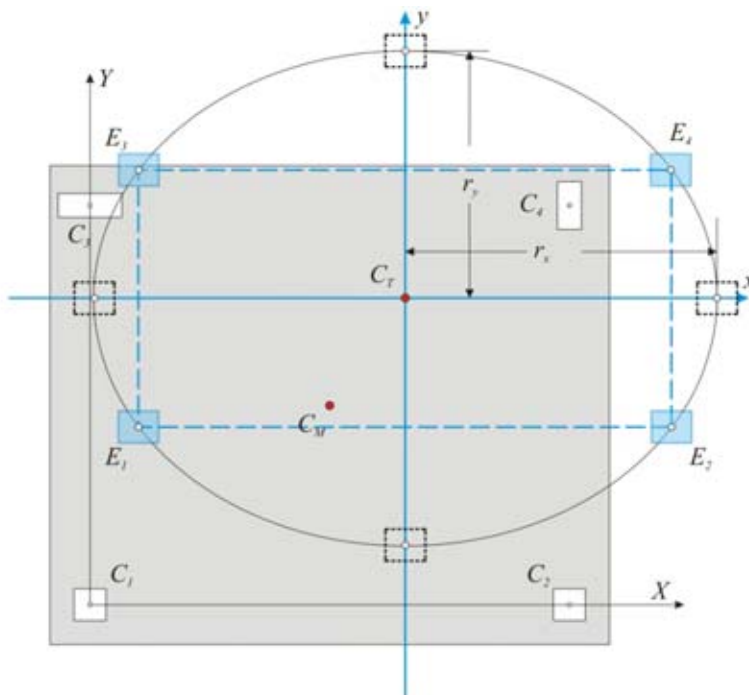
Μεταφορική δυσκαμψία K_j διαφράγματος είναι η δύναμη κατά τη διεύθυνση j που χρειάζεται για να προκαλέσει παράλληλη μετατόπιση του διαφράγματος κατά μία μονάδα προς αυτή τη διεύθυνση.

Δυστρεψία K_{θ} διαφράγματος είναι η ροπή που χρειάζεται για να προκαλέσει στροφή του διαφράγματος κατά μία μονάδα.

5.3.3.5 Έλλειψη και Ακτίνες Δυστρεψίας

Ζητείται η δημιουργία ενός ιδεατού απλού ισοδύναμου στατικού συστήματος που θα έχει την ίδια σεισμική συμπεριφορά με το πραγματικό στατικό σύστημα.

Απάντηση: Τοποθετούμε 4 ιδεατές κολόνες E_1, E_2 και E_3, E_4 συμμετρικά ως προς το κέντρο C_T και ως προς τους άξονες x και y , δηλαδή και οι 4 ιδεατές κολόνες έχουν την ίδια απόλυτη τιμή της συντεταγμένης x και της συντεταγμένης y . Οι ιδεατές κολόνες E_1, E_2, E_3, E_4 θεωρείται ότι η κάθε μία έχει δυσκαμψία $K_x=1/4 \cdot \Sigma(K_{xi})$ και $K_y=1/4 \cdot \Sigma(K_{yi})$.



Το σύστημα αυτό ικανοποιεί τις 2 συνθήκες του πραγματικού συστήματος που αφορούν τις μετακινήσεις ολίσθησης του διαφράγματος του συνόλου των κολονών επειδή έχει :

Δυσκαμψία κατά x : $4 \cdot 1/4 \cdot \Sigma(K_{xi}) = \Sigma(K_{xi})$ και δυσκαμψία κατά y : $4 \cdot (1/4) \cdot \Sigma(K_{yi}) = \Sigma(K_{yi})$

Για να ικανοποιείται 3^η συνθήκη πρέπει το ιδεατό σύστημα να έχει δυστρεψία $K_{\theta,eq} = [4 \cdot (1/4) \cdot \Sigma(K_{yi}) \cdot y^2 + 4 \cdot (1/4) \cdot \Sigma(K_{xi}) \cdot x^2] = \Sigma(K_{xi}) \cdot y^2 + \Sigma(K_{yi}) \cdot x^2$, ίση με τη δυστρεψία του πραγματικού συστήματος $K_{\theta,re} = K_{\theta} = \Sigma(K_{xi} \cdot y_i^2 + K_{yi} \cdot x_i^2 + K_{zi})$, δηλαδή πρέπει $K_{\theta,eq} = K_{\theta,re} \rightarrow$

$$\Sigma(K_{yi}) \cdot x^2 + \Sigma(K_{xi}) \cdot y^2 = K_{\theta} \rightarrow$$

Ακτίνες δυστρεψίας του διαφράγματος:

$$\frac{x^2}{r_x^2} + \frac{y^2}{r_y^2} = 1 \quad \text{όπου } r_x = \sqrt{\frac{K_{\theta}}{\Sigma(K_{yi})}} \quad \text{και } r_y = \sqrt{\frac{K_{\theta}}{\Sigma(K_{xi})}} \quad (8')$$

Η καμπύλη (8') είναι έλλειψη με κέντρο το C_T , διεύθυνση αυτή των κυρίων αξόνων, εν προκειμένω η διεύθυνση του αρχικού συστήματος, και ημιάξονες r_x, r_y , οι οποίες καλούνται και ακτίνες δυστρεψίας του διαφράγματος.

Συμπέρασμα:

Η στρεπτική συμπεριφορά ενός ορόφου μπορεί να περιγραφεί από την ελλειψοειδή γραμμή δυστρεψιάς (C_T, r_x, r_y) που παριστάνει την ισοδύναμη κατανομή της δυσκαμψίας του διαφράγματος.

Οι ακτίνες r_x, r_y , της έλλειψης ονομάζονται ακτίνες δυστρεψιάς.

Υπάρχει απειρία λύσεων ιδεατών διπλών ζευγών συστημάτων, εκ των οποίων το πιο χαρακτηριστικό είναι αυτό με τις 4 ιδεατές κολόνες στα 4 άκρα της έλλειψης.

Γενικότερα δε υπάρχει και απειρία λύσεων με n-απλών αντιδιαμετρικών συστημάτων, όπου η κάθε ιδεατή κολόνα έχει δυσκαμψίες ίσες με το 1/n των συνολικών δυσκαμψιών του συστήματος.

Επαλληλία των τριών καταστάσεων:

Έως εδώ όλοι οι υπολογισμοί εξαρτιόνταν από την γεωμετρία του φορέα και δεν επηρεάζονταν από το μέγεθος της εξωτερικής φόρτισης, π.χ. το Κέντρο Ελαστικής Στροφής, οι στατικές εκκεντρότητες, ή οι ακτίνες δυστρεψιάς, είναι ανεξάρτητες του μεγέθους της σεισμικής δύναμης.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις παραμορφώσεις του φορέα και τις εντάσεις του λόγω της εξωτερικής σεισμικής φόρτισης H.

Η εκάστοτε σεισμική δύναμη H εξασκείται στο κέντρο μάζας C_M του διαφράγματος. Η δύναμη αυτή μπορεί να αναλυθεί στις δύο δυνάμεις H_x και H_y παράλληλα στους δύο άξονες του κύριου συστήματος. Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε την προηγούμενη ανάλυση, μεταφέρουμε τις δυνάμεις H_x, H_y στο κέντρο ελαστικής στροφής C_T μαζί με τη ροπή M_{CT} βάσει της σχέσης:

Ροπή σεισμού στο Κέντρο Ελαστικής Στροφής:

$$M_{CT} = -H_x \cdot e_{oy} + H_y \cdot e_{ox} \quad (9')$$

Με τα εξωτερικά μεγέθη H_x, H_y, M_{CT} , υπολογίζουμε:

- τις παραμορφώσεις δ_{xo}, δ_{yo} και θ_z του πόλου περιστροφής του διαφράγματος από τις σχέσεις:

Παραμορφώσεις του Κέντρου Ελαστικής Στροφής:

$$\delta_{xo} = \frac{H_x}{K_x}, \delta_{yo} = \frac{H_y}{K_y}, \theta_z = \frac{M_{CT}}{K_\theta} \quad \text{όπου} \quad (10')$$

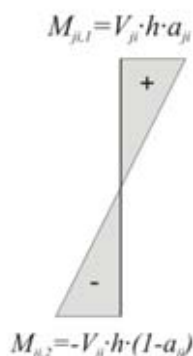
$$K_x = \sum (K_{xi}), K_y = \sum (K_{yi}), K_\theta = \sum (K_{xi} \cdot y_i^2 + K_{yi} \cdot x_i^2 + K_{zi})$$

- τις παραμορφώσεις δ_{xi}, δ_{yi} της κεφαλής κάθε κολόνας από τις σχέσεις:

Μετατοπίσεις κολονών:

$$\delta_{xi} = \delta_{xo} - \theta_z \cdot y_i, \delta_{yi} = \delta_{yo} + \theta_z \cdot x_i \quad (11')$$

- τις τέμνουσες και τις ροπές κάθε υποστυλώματος στο τοπικό του σύστημα βάσει των σχέσεων:

Σεισμικές Τέμνουσες και Σεισμικές Ροπές:

$$V_{xi} = \delta_{xi} \cdot K_{xi} , V_{yi} = \delta_{yi} \cdot K_{yi} \quad (13')$$

$$M_{xi,1} = V_{xi} \cdot h \cdot a_{xi} , M_{xi,2} = -V_{xi} \cdot h \cdot (1 - a_{xi}) \quad (14')$$

$$M_{yi,1} = V_{yi} \cdot h \cdot a_{yi} , M_{yi,2} = -V_{yi} \cdot h \cdot (1 - a_{yi})$$

Κατανομή ροπών

$$\text{Ισχύει } M_{ji,1} - M_{ji,2} = V_{ji} \cdot h$$

Παρατηρήσεις

- Η κατανομή των τεμνουσών δυνάμεων, δηλαδή η τέμνουσα που αναλαμβάνει κάθε κολόνα εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία του στατικού συστήματος, δηλαδή αν αλλάξει π.χ. το μέτρο ελαστικότητας του υλικού των κολονών οι μετατοπίσεις των κολονών θα αλλάξουν αλλά οι τέμνουσες όχι.
- Όσο πιο μακριά από το κέντρο ελαστικής στροφής βρίσκεται μία κολόνα, τόσο μεγαλύτερη είναι η επιρροή της στροφής, άρα η πιο μεγάλη στροφική επιβάρυνση γίνεται σε κολόνες που βρίσκονται στη περίμετρο του ορόφου.
- Οι παραμορφώσεις λόγω στροφής εξαναγκάζουν τις κολόνες σε διαξονική κάμψη, δηλαδή σε ταυτόχρονη κάμψη και στις δύο διευθύνσεις των κολονών γι' αυτό και πρέπει να περιορίζονται όσο το δυνατόν περισσότερο.
- Οι σεισμικές δυνάμεις αλλάζουν διαρκώς κατεύθυνση και ταυτόχρονα αλλάζει και η κατεύθυνση των μετατοπίσεων και αυτό έχει ως συνέπεια να αλλάζει συνεχώς η διαξονική κάμψη. Γι' αυτό σε αντίθεση με τις μη αντισεισμικές κατασκευές δεν μπορεί να προβλεφθεί η ακριβής θέση αυξημένου οπλισμού και αυτός είναι ένας από τους λόγους που ο οπλισμός τοποθετείται σχετικά ομοιόμορφα στη περίμετρο των κολονών.
- Ακόμη και σε συμμετρικούς γεωμετρικά φορείς, οι τυχηματικές εκκεντρότητες δ μπορεί να δημιουργήσει έντονες διαξονικές εντάσεις και γι' αυτό η ανάγκη υψηλής δυστρεψιάς είναι εξαιρετικά χρήσιμη. Υψηλή δυστρεψία επιτυγχάνεται κυρίως με διάταξη ισχυρών κολονών, συνήθως τοιχίων, στη περίμετρο του κτιρίου.
- Η ισχυρή δυστρεψία είναι χρήσιμη όχι μόνο σε αντισεισμικά κτίρια αλλά και σε κάθε κτίριο επειδή κάθε κτίριο μπορεί να καταπονηθεί οριζόντιες δράσεις όπως είναι ο άνεμος ή από ασύμμετρο χιόνι ή από άλλους απρόβλεπτους παράγοντες.
- Η δυστρεψία ενός διαφραγματικού ορόφου εξαρτάται κυρίως από τη θέση του κέντρου ελαστικής στροφής σε σχέση με το κέντρο μάζας, και από το μέγεθος των ακτίνων δυστρεψιάς. Και οι δύο αυτοί παράγοντες εξαρτώνται μόνο από τη γεωμετρία του φορέα και όχι από το μέγεθος των σεισμικών φορτίσεων.

⁶ Βλέπε §

5.3.3.6 Μέθοδος εργασίας:

Αν συνοψίσουμε όλη την θεωρία, για να επιτύχουμε την λύση του προβλήματος υπολογισμού των παραμορφώσεων και των εντάσεων ενός διαφραγματικού ορόφου, μπορούμε να ακολουθήσουμε την παρακάτω πορεία υπολογισμών. Η πορεία αυτή έχει ακολουθηθεί και στο συνοδευτικό αρχείο [<diaphragm_ortho.xls>](#)⁷ με το οποίο επαληθεύονται οι υπολογισμοί του παραδείγματος αυτού καθώς και των υπόλοιπων που ακολουθούν, αλλά και κάθε άλλου φορέα.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΦΡΑΓΜΑΤΟΣ (ανεξάρτητα της φόρτισης)

1. Υπολογίζονται οι δυσκαμψίες K_{xi} , K_{yi} και η δυστρεψία K_{zi} κάθε κολόνας
2. Υπολογίζονται οι συντεταγμένες του κέντρου ελαστικής στροφής $C_T(X_{CT}, Y_{CT})$ από τις εξισώσεις (4') και (5')
3. Μεταφέρουμε τις συντεταγμένες X , Y του κέντρου μάζας C_M του διαφράγματος και του κέντρου βάρους κάθε κολόνας στο κύριο σύστημα αξόνων και υπολογίζουμε τις στατικές εκκεντρότητες e_{ox} , e_{oy} του φορέα από τις σχέσεις (6')
4. Υπολογίζουμε την δυστρεψία K_θ του διαφράγματος από την εξίσωση (7')
5. Υπολογίζουμε τις ακτίνες δυστρεψίας r_x , r_y από τις σχέσεις (8')

Έως εδώ οι υπολογισμοί ήταν ανεξάρτητοι της εξωτερικής φόρτισης. Στη συνέχεια υπολογίζεται η κατανομή της έντασης και οι ελαστικές παραμορφώσεις των στοιχείων του διαφράγματος, λόγω της εξωτερικής φόρτισης.

ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΝΤΑΣΕΙΣ ΤΟΥ ΟΡΟΦΟΥ (εξαρτώμενες από την φόρτιση)

6. Μεταφέρουμε τη σεισμική δράση με τις οριζόντιες δυνάμεις H_x , H_y και τη ροπή M_{CT} στο κέντρο ελαστικής στροφής από την εξίσωση (9')
7. Υπολογίζουμε τις παραμορφώσεις δ_{xo} , δ_{yo} και θ_z του πόλου περιστροφής του διαφράγματος από τις σχέσεις (10')
8. Υπολογίζουμε τις παραμορφώσεις δ_{xi} , δ_{yi} της κεφαλής κάθε κολόνας από τις σχέσεις (11')
9. Υπολογίζουμε τις σεισμικές τέμνουσες V_{xi} , V_{yi} κάθε κολόνας από τις σχέσεις (13')
10. Υπολογίζουμε τις κύριες ροπές κάμψης $M_{xi,1}$, $M_{xi,2}$ & $M_{yi,1}$, $M_{yi,2}$ από τις σχέσεις (14')

Παράδειγμα, της απλής κατασκευής που χρησιμοποιήθηκε στη θεωρία:

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΦΡΑΓΜΑΤΟΣ (ανεξάρτητα της φόρτισης)

Υπολογισμός δυσκαμψιών:

Η δυσκαμψία K_{ij} κάθε κολόνας i προς τη διεύθυνση j είναι $K_{ji}=k_{ji} \cdot (EI_{ji}/h^3) \cdot k_{ji,va}$ (§4.1.5). Θεωρούμε τα υποστυλώματα αμφίπακτα $\rightarrow k_{ji}=12$ και δεν λαμβάνουμε υπόψη την επιρροή της διάτμησης⁸ $\rightarrow k_{ji,va}=1.0$ (§4.1.1), οπότε η δυσκαμψία του υποστυλώματος προκύπτει από τη σχέση $K_{ji}=12 \cdot EI_{ji}/h^3$. Επίσης θεωρούμε την ίδια δυστρεψία των κολόνων $K_{zi}=0$.

Οι κολόνες του παραδείγματος έχουν τα μεγέθη E και h ίδια, οπότε η δυσκαμψία τους μπορεί να θεωρηθεί $K_{ji}=C \cdot I_{ji}$ όπου $C=12E/h^3$

⁷ Υπάρχει επίσης και το συνοδευτικό αρχείο [<diaphragm general.xls>](#) το οποίο υποστηρίζει τη γενική περίπτωση που περιγράφεται στο παράρτημα Α

⁸ Αν στο συνοδευτικό αρχείο [<diaphragm ortho.xls>](#), στο project 4Columns, ενεργοποιήσουμε την επιλογή να λαμβάνει υπόψη τα έργα από τέμνουσες δυνάμεις, οι συντελεστές μείωσης της δυσκαμψίας k_{va} έχουν τιμή 0.966 στις C_1, C_2 και την ισχυρότερη τιμή στη κολόνα C_3 κατά x : $k_{va,x3}=0.875$.

Λαμβάνουμε σαν μέτρο ελαστικότητας $E=32.80 \text{ GPa}$ που αντιστοιχεί σε σκυρόδεμα C30/37 (§6.1) οπότε $C=12E/h^3=12 \cdot 32.80 \cdot \text{GPa}/(3.0^3 \text{m}^3)=14.58 \times 10^9 \text{ N/m}^5$.

$$C_1, C_2 \text{ 400/400 } K_{1x}=K_{1y}=K_{2x}=K_{2y}=14.58 \cdot 10^9 \text{ N/m}^5 \cdot 0.400 \cdot 0.400^3/12 \cdot \text{m}^4=31.1 \times 10^6 \text{ N/m},$$

$$C_3 \text{ 800/300 } K_{3x}=14.58 \times 10^9 \times 0.300 \times 0.800^3/12=186.6 \times 10^6 \text{ N/m},$$

$$K_{3y}=14.58 \times 10^9 \times 0.800 \times 0.300^3/12=26.2 \times 10^6 \text{ N/m}$$

$$C_4 \text{ 300/600 } K_{4x}=14.58 \times 10^9 \times 0.600 \times 0.300^3/12=19.7 \times 10^6 \text{ N/m},$$

$$K_{4y}=14.58 \times 10^9 \times 0.300 \times 0.600^3/12=78.7 \times 10^6 \text{ N/m}$$

Οπότε βάσει των σχέσεων (3) προκύπτει:

Υπολογισμός Κέντρου Ελαστικής Στροφής και των Μεταφορικών Δυσκαμπιών: εξισώσεις (4') και (5')

$$K_x=\Sigma(K_{xi})=(31.1+31.1+186.6+19.7) \times 10^6 \text{ N/m}=268.5 \times 10^6 \text{ N/m}$$

$$K_y=\Sigma(K_{yi})=(31.1+31.1+26.2+78.7) \times 10^6 \text{ N/m}=167.1 \times 10^6 \text{ N/m}$$

$$X_{CT}=\Sigma(X_i \cdot K_{yi})/K_y=[(0.0 \times 31.1+6.0 \times 31.1+0.0 \times 26.2+6.0 \times 78.7) \times 10^6]/(167.1 \times 10^6)=658.8/167.1=3.94 \text{ m}$$

$$Y_{CT}=\Sigma(Y_i \cdot K_{xi})/K_x=[(0.0 \times 31.1+0.0 \times 31.1+5.0 \times 186.6+5.0 \times 19.7) \times 10^6]/268.5 \times 10^6=1031.5/268.5=3.84 \text{ m}$$

Μεταφορά των συντεταγμένων στο κύριο σύστημα $xCTy$: εξισώσεις (6')

$$C_1(-3.94, -3.84), C_2(2.06, -3.84), C_3(-3.94, 1.16), C_4(2.06, 1.16), C_M(-0.94, -1.34), C_T(0.0, 0.0)$$

$$e_{ox}=-0.94 \text{ m}, e_{oy}=-1.34 \text{ m}$$

Υπολογισμός Δυστρεψίας του διαφράγματος: εξίσωση (7')

$$K_\theta=\Sigma[K_{xi} \cdot y_i^2 + K_{yi} \cdot x_i^2 + K_{zi}]=31.1 \times 3.84^2 + 31.1 \times 3.94^2 + 31.1 \times 3.84^2 + 31.1 \times 2.06^2 + 186.6 \times 1.16^2 + 26.2 \times 3.94^2 + 19.7 \times 1.16^2 + 78.7 \times 2.06^2 \times 10^6 \text{ N/m} \cdot \text{m}^2=(1194.8+1355.4) \times 10^6 \text{ Nm}=2550 \times 10^6 \text{ Nm}^9$$

Ακτίνες δυστρεψίας του διαφράγματος: εξισώσεις (8')

$$r_x=\sqrt{K_\theta/K_y}=\sqrt{2550 \cdot 10^6 \text{ Nm}/(167.1 \cdot 10^6 \text{ N/m})}=3.91 \text{ m}, r_y=\sqrt{K_\theta/K_x}=\sqrt{2550 \cdot 10^6 \text{ Nm}/(268.5 \cdot 10^6 \text{ N/m})}=3.08 \text{ m}$$

ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΝΤΑΣΕΙΣ ΤΟΥ ΟΡΟΦΟΥ (εξαρτώμενες από την φόρτιση)

Αν η σεισμική δύναμη είναι $H=90.6 \text{ kN}^{10}$ και το ύψος του ορόφου $h=3.0 \text{ m}$, ζητούνται οι μετατοπίσεις του κέντρου ελαστικής στροφής C_T και κάθε κολόνας, οι τέμνουσες δυνάμεις που αναλαμβάνει η κάθε κολόνα και οι αντίστοιχες ροπές για τις τρεις περιπτώσεις φόρτισης: (Α) $H_x=90.6 \text{ kN}$, $H_y=0$ και (Β) $H_x=0 \text{ kN}$, $H_y=90.6 \text{ kN}$, (Γ) $H_x=90.6 \text{ kN}$, $H_y=-27.2 \text{ kN}$

Περίπτωση Α: $H_x=90.6 \text{ kN}$, $H_y=0.0$

Ροπή σεισμού στο Κέντρο Ελαστικής Στροφής: εξίσωση (9')

$$M_{CT}=-H_x \cdot e_{oy} + H_y \cdot e_{ox} = -90.6 \text{ kN} \cdot (-1.34 \text{ m}) = 121.4 \text{ kNm}$$

Παραμορφώσεις Κέντρου Ελαστικής Στροφής: εξισώσεις (10')

⁹ Οι ίδιες δυστρεψίες των κολονών K_z είναι $K_{z1}=K_{z2}=0.5E \cdot I_d/h=0.5 \cdot 32.80 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.1404 \cdot 0.4^4 \text{ m}^4 / (3.0 \text{ m})=20 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}$.

$K_{z3}=0.5E \cdot n \cdot b^3 \cdot d/h=0.5 \cdot 32.80 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.251 \cdot 0.3^3 \cdot \text{m}^3 \cdot 0.8 \text{ m} / (3.0 \text{ m})=30 \times 10^6 \text{ Nm}$ και

$K_{z4}=0.5E \cdot n \cdot b^3 \cdot d/h=0.5 \cdot 32.80 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.229 \cdot 0.3^3 \cdot \text{m}^3 \cdot 0.6 \text{ m} / (3.0 \text{ m})=20 \times 10^6 \text{ Nm}$, οπότε αν λαμβανόντουσαν υπόψη στο $K_\theta=2550 \times 10^6 \text{ Nm}$ θα γινόταν $K_\theta=(2550+90) \times 10^6 \text{ Nm}=2640 \times 10^6 \text{ Nm}$ δηλαδή μία αύξηση της δυστρεψίας του ορόφου κατά 3.5%.

¹⁰ Η δύναμη αυτή αντιστοιχεί σε σεισμική επιτάχυνση εφαρμογής στη θέση της μάζας $a=0.20g$ οπότε $H=\Sigma(mi) \cdot 0.20g=45.3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 0.20 \cdot 10 \text{ m/sec}^2=90.6 \text{ kN}$

$$\delta_{x0} = H_x / K_x = 90.6 \cdot 10^3 \text{ N} / (268.5 \cdot 10^6 \text{ N/m}) = 0.337 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0.337 \text{ mm}, \delta_{y0} = 0^{11},$$

$$\theta_z = M_{CT} / K_\theta = 121.4 \cdot 10^3 \text{ Nm} / (2550 \cdot 10^6 \text{ Nm}) = 47.6 \cdot 10^{-6}$$

Μετατοπίσεις κολονών: (εξισώσεις 11')

$\delta_{xi} = \delta_{x0} + \delta_{x\theta i} = \delta_{x0} - \theta_z \cdot y_i$, $\delta_{yi} = 0.0 + \theta_z \cdot x_i = \theta_z \cdot x_i$ Για λόγους σύγκρισης των μεγεθών υπολογίζουμε ξεχωριστά τις παραμορφώσεις λόγω στροφής

Κολόνα C₁: $\delta_{x\theta 1} = -\theta_z \cdot y_1 = -47.6 \times 10^{-6} \times (-3.84 \times 10^3 \text{ mm}) = 0.183 \text{ mm}$, $\delta_{y\theta 1} = \theta_z \cdot x_1 = -0.188 \text{ mm}$ άρα

C₁: $\delta_{x\theta 1} = 0.183 \text{ mm}$, $\delta_{y\theta 1} = -0.188 \text{ mm}$, $\delta_{x1} = 0.337 + 0.183 = 0.520 \text{ mm}$, $\delta_{y1} = -0.188 \text{ mm}$

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτουν και για τις υπόλοιπες κολόνες:

C₂: $\delta_{x\theta 2} = 0.183 \text{ mm}$, $\delta_{y\theta 2} = 0.098 \text{ mm}$, $\delta_{x2} = 0.337 + 0.183 = 0.520 \text{ mm}$, $\delta_{y2} = 0.098 \text{ mm}$

C₃: $\delta_{x\theta 3} = -0.055 \text{ mm}$, $\delta_{y\theta 3} = -0.188 \text{ mm}$, $\delta_{x3} = 0.337 - 0.055 = 0.282 \text{ mm}$, $\delta_{y3} = -0.188 \text{ mm}$

C₄: $\delta_{x\theta 4} = -0.055 \text{ mm}$, $\delta_{y\theta 4} = 0.098 \text{ mm}$, $\delta_{x4} = 0.337 - 0.055 = 0.282 \text{ mm}$, $\delta_{y4} = 0.098 \text{ mm}$

Σεισμικές Τέμνουσες: εξισώσεις (13')

C₁: $V_{x1} = \delta_{x1} \cdot K_{x1} = 0.520 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 31.1 \cdot 10^6 \text{ N/m} = 16.17 \text{ kN}$, $V_{y1} = \delta_{y1} \cdot K_{y1} = -0.188 \times 31.1 = -5.85 \text{ kN}$

C₂: $V_{x2} = \delta_{x2} \cdot K_{x2} = 0.520 \times 31.1 = 16.17 \text{ kN}$, $V_{y2} = \delta_{y2} \cdot K_{y2} = 0.098 \times 31.1 = 3.05 \text{ kN}$

C₃: $V_{x3} = \delta_{x3} \cdot K_{x3} = 0.282 \times 186.6 = 52.62 \text{ kN}$, $V_{y3} = \delta_{y3} \cdot K_{y3} = -0.188 \times 26.2 = -4.93 \text{ kN}$

C₄: $V_{x4} = \delta_{x4} \cdot K_{x4} = 0.282 \times 19.7 = 5.56 \text{ kN}$, $V_{y4} = \delta_{y4} \cdot K_{y4} = 0.098 \times 78.7 = 7.71 \text{ kN}$

Επαλήθευση: $\Sigma(V_{xi}) = 90.52 \text{ kN} \approx 90.6 \text{ kN}$ και $\Sigma(V_{yi}) = 0.02 \approx 0.0$ όπως αναμενόταν

Σεισμικές Ροπές: εξισώσεις (14')

Λαμβάνεται για όλες τις κολόνες $a_{xi} = a_{yi} = 0.50$ οπότε και $(1 - a_{xi}) = (1 - a_{yi}) = 0.50$

C₁: $M_{x1,1} = 0.5 \times 16.17 \times 3.0 = 24.3 \text{ kNm}$, $M_{x1,2} = -24.3 \text{ kNm}$,

$M_{y1,1} = 0.5 \times (-5.85) \times 3.0 = -8.8 \text{ kNm}$, $M_{y1,2} = 8.8 \text{ kNm}$

C₂: $M_{x2,1} = 0.5 \times 16.17 \times 3.0 = 24.3 \text{ kNm}$, $M_{x2,2} = -24.3 \text{ kNm}$,

$M_{y2,1} = 0.5 \times 3.05 \times 3.0 = 4.6 \text{ kNm}$, $M_{y2,2} = -4.6 \text{ kNm}$

C₃: $M_{x3,1} = 0.5 \times 52.62 \times 3.0 = 78.9 \text{ kNm}$, $M_{x3,2} = -78.9 \text{ kNm}$,

$M_{y3,1} = 0.5 \times (-4.93) \times 3.0 = -7.4 \text{ kNm}$, $M_{y3,2} = 7.4 \text{ kNm}$

C₄: $M_{x4,1} = 0.5 \times 5.56 \times 3.0 = 8.3 \text{ kNm}$, $M_{x4,2} = -8.3 \text{ kNm}$,

$M_{y4,1} = 0.5 \times 7.71 \times 3.0 = 11.6 \text{ kNm}$, $M_{y4,2} = -11.6 \text{ kNm}$

Περίπτωση Β: H_x=0.0 kN, H_y=90.6

Ροπή σεισμού στο Κέντρο Ελαστικής Στροφής: εξίσωση (9')

$M_{CT} = -H_x \cdot e_{oy} + H_y \cdot e_{ox} = 90.6 \text{ kN} \cdot (-0.94 \text{ m}) = -85.2 \text{ kNm}$

Παραμορφώσεις Κέντρου Ελαστικής Στροφής: εξισώσεις (10')

$\delta_{x0} = 0$, $\delta_{y0} = H_y / K_y = 90.6 \cdot 10^3 \text{ N} / (167.1 \cdot 10^6 \text{ N/m}) = 0.542 \text{ mm}$,

$\theta_z = M_{CT} / K_\theta = -85.2 \cdot 10^3 \text{ Nm} / (2550 \cdot 10^6 \text{ Nm}) = -33.4 \times 10^{-6}$

¹¹ Στη γενική περίπτωση κολονών με κλίση, η αντίστοιχη φόρτιση δημιουργεί και μετακίνηση κατά y που συμβολίζουμε με δ_{y0} ενώ την μετακίνηση κατά x συμβολίζουμε με δ_{x0} (βλέπε Παράρτημα Α). Σε σύστημα παράλληλων ορθογωνικών κολονών, όπως το συγκεκριμένο, οι δευτερεύουσες μετατοπίσεις δ_{y0} , όπως και οι δ_{x0} , είναι μηδενικές.

Για λόγους οικονομίας χώρου στη συνέχεια θα υπολογιστούν μόνο τα στοιχεία της κολόνας C_3 τα υπόλοιπα αποτελέσματα μπορούν να δημιουργηθούν ούτως ή άλλως στο συνοδευτικό αρχείο <diaphragm ortho.xls>

Μετατοπίσεις κολονών: (εξισώσεις 11')

$$C_3: \delta_{x\theta_3} = -\theta_z \cdot y_3 = -(-33.4) \times 10^{-6} \times 1.16 \times 10^3 \text{ mm} = 0.039 \text{ mm}, \delta_{y\theta_3} = \theta_z \cdot x_3 = (-33.4) \times (-3.94 \times 10^3 \text{ mm}) = 0.132 \text{ mm}$$

$$\delta_{x\theta_3} = 0.039 \text{ mm}, \delta_{y\theta_3} = 0.132 \text{ mm}, \delta_{x_3} = 0.039 \text{ mm}, \delta_{y_3} = 0.542 + 0.132 = 0.674 \text{ mm}$$

Σεισμικές Τέμνουσες: εξισώσεις (13')

$$C_3: V_{x_3} = \delta_{x_3} \cdot K_{x_3} = 0.039 \times 186.6 = 7.28 \text{ kN}, V_{y_3} = \delta_{y_3} \cdot K_{y_3} = 0.674 \times 26.2 = 17.66 \text{ kN}$$

Σεισμικές Ροπές: εξισώσεις (14')

$$C_3: M_{x_3,1} = 0.5 \times 7.28 \times 3.0 = 10.9 \text{ kNm}, M_{x_3,2} = -10.9 \text{ kNm}, M_{y_3,1} = 0.5 \times 17.66 \times 3.0 = 26.5 \text{ kNm}, M_{y_3,2} = -26.5 \text{ kNm}$$

Περίπτωση Γ: $H_x = 90.6 \text{ kN}$, $H_y = -27.2 \text{ kN}$ ¹²

Ροπή σεισμού στο Κέντρο Ελαστικής Στροφής: εξίσωση (9')

$$M_{CT} = -H_x \cdot e_{oy} + H_y \cdot e_{ox} = -90.6 \times (-1.34) + (-27.2) \times (-0.94 \text{ m}) = 121.4 + 25.6 = 147.0 \text{ kNm}$$

Παραμορφώσεις Κέντρου Ελαστικής Στροφής: εξισώσεις (10')

$$\delta_{x_0} = H_x / K_x = 90.6 / 268.5 \text{ mm} = 0.337 \text{ mm}, \delta_{y_0} = H_y / K_y = -27.2 / 167.1 = -0.163 \text{ mm},$$

$$\theta_z = M_{CT} / K_\theta = 147 \times 10^3 \text{ Nm} / (2550 \times 10^6 \text{ Nm}) = 57.65 \times 10^{-6}$$

Για λόγους οικονομίας χώρου στη συνέχεια θα υπολογιστούν μόνο τα στοιχεία της κολόνας C_3 τα υπόλοιπα αποτελέσματα μπορούν να δημιουργηθούν ούτως ή άλλως στο συνοδευτικό αρχείο <diaphragm ortho.xls>

Μετατοπίσεις κολονών: (εξισώσεις 11')

$$C_3: \delta_{x\theta_3} = -\theta_z \cdot y_3 = -57.65 \times 10^{-6} \times 1.16 \times 10^3 \text{ mm} = -0.067 \text{ mm}, \delta_{y\theta_3} = \theta_z \cdot x_3 = 57.65 \times (-3.94 \times 10^3 \text{ mm}) = -0.227 \text{ mm}$$

$$\delta_{x\theta_3} = -0.067 \text{ mm}, \delta_{y\theta_3} = -0.227 \text{ mm}, \delta_{x_3} = 0.337 - 0.067 = 0.270 \text{ mm}, \delta_{y_3} = -0.163 - 0.227 = -0.390 \text{ mm}$$

Σεισμικές Τέμνουσες: εξισώσεις (13')

$$C_3: V_{x_3} = \delta_{x_3} \cdot K_{x_3} = 0.270 \times 186.6 = 50.38 \text{ kN}, V_{y_3} = \delta_{y_3} \cdot K_{y_3} = -0.390 \times 26.2 = -10.22 \text{ kN}$$

Σεισμικές Ροπές: εξισώσεις (14')

$$C_3: M_{x_3,1} = 0.5 \times 50.38 \times 3.0 = 75.6 \text{ kNm}, M_{x_3,2} = -75.6 \text{ kNm}, M_{y_3,1} = 0.5 \times (-10.22) \times 3.0 = -15.3 \text{ kNm}, M_{y_3,2} = 15.3 \text{ kNm}$$

Παρατηρήσεις

- Η επίλυση τέτοιων προβλημάτων γίνεται πρακτικά με την μορφή πίνακα, γι' αυτό και έχουν δημιουργηθεί οι σχετικοί ηλεκτρονικοί πίνακες που συνοδεύουν αυτό το βιβλίο.
- Με την χρήση αυτών των πινάκων μπορεί ο αναγνώστης να δώσει δικές του κατασκευές ή/και να δοκιμάσει την επιρροή διαφόρων παραγόντων π.χ. αλλαγή του μέτρου ελαστικότητας των κολονών, αλλαγή των συντελεστών δυσκαμψίας, αλλαγή των διατομών, αλλαγή των φορτίων, κτλ.
- Για σεισμό κατά x η μετατόπιση του κέντρου ελαστικής στροφής είναι 0.337 mm ενώ η μεγαλύτερη παραμόρφωση του διαφράγματος λόγω στροφής είναι 0.520 mm , δηλαδή 54% μεγαλύτερη της μέσης τιμής. Για σεισμό κατά y η μετατόπιση του κέντρου ελαστικής

¹² Οι αντισεισμικοί κανονισμοί επιβάλλουν την εξέταση της σεισμικής φόρτισης μίας κατεύθυνσης με τον συνδυασμό ενός ποσοστού και της άλλης κατεύθυνσης π.χ. 30%. Όλοι οι σεισμικοί συνδυασμοί επιβάλλεται να λαμβάνονται με όλους τους πιθανούς συνδυασμούς προσήμου (κατεύθυνσης) + και -

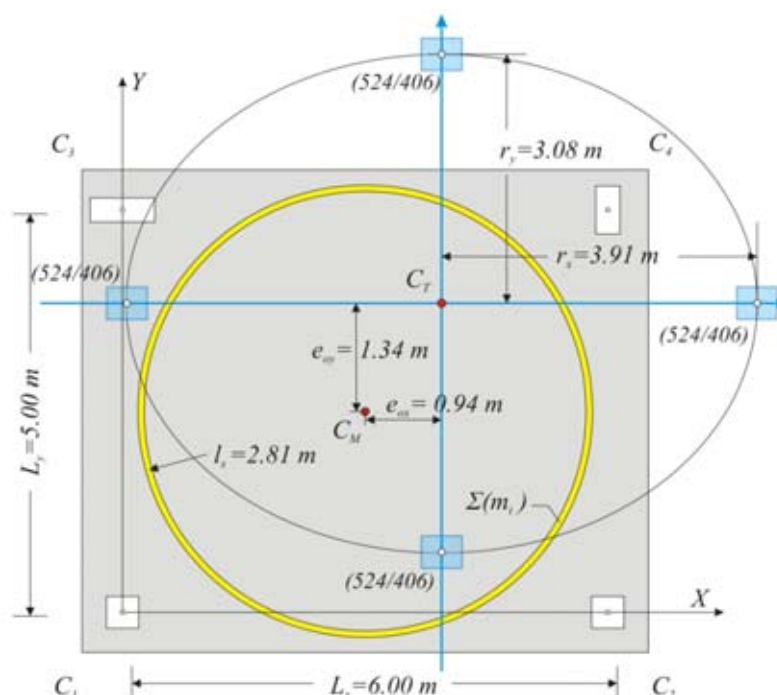
στροφής είναι 0.520 mm ενώ η μεγαλύτερη παραμόρφωση του διαφράγματος λόγω στροφής είναι 0.674 mm, δηλαδή 30% μεγαλύτερη της μέσης τιμής.

- Η μέγιστη παραμόρφωση 0.674 mm είναι ενδεικτική και ιδεατή επειδή η πραγματική παραμόρφωση είναι πολύ μεγαλύτερη για τους παρακάτω λόγους: η πραγματική δυσκαμψία [EC8 §4.3.1(6),(7)] λόγω ρηγματώσεων πρέπει να λαμβάνεται μειωμένη κατά μία τάξη του 50% άρα γι' αυτό το λόγο θα έχουμε διπλάσια παραμόρφωση $2 \cdot 0.674 = 1.35$ mm. Αν ταυτόχρονα λαμβάναμε μονόπακτες τις κολόνες θα είχαμε συντελεστή δυσκαμψίας $k=3$ αντί για $k=12$ και λόγω της προηγούμενης μείωσης κατά 50% θα είχαμε $k=1.5$. Με αυτό τον συντελεστή δυσκαμψίας, θα λαμβάναμε $12/1.5=8$ φορές μεγαλύτερη ελαστική παραμόρφωση $\delta=8 \cdot 0.674=5.4$ mm (μπορεί να επιβεβαιωθεί με την αλλαγή στο αρχείο του excel).

Για να υπολογίσουμε την πραγματική παραμόρφωση, ο EC8 επιβάλλει τον πολλαπλασιασμό της ελαστικής παραμόρφωσης επί τον συντελεστή συμπεριφοράς q . Με μία μέση τιμή του $q=3.50$, η προηγούμενη παραμόρφωση θα γινόταν $3.5 \cdot 5.4=19$ mm. Βέβαια, για τα φορτία ενός μονώροφου κτιρίου αυτών των διαστάσεων, το μέγεθος των κολονών είναι πολύ μεγάλο γι' αυτό και η μετακίνηση σχετικά μικρή. Αν οι κολόνες είχαν το $\frac{1}{2}$ της διάστασής τους π.χ. η 400/400 να ήταν 200/200, η μετακίνηση του διαφράγματος θα ήταν 2^4 μεγαλύτερη δηλαδή $\delta_{yo}=16 \cdot 19=304$ mm. Αυτή η παραμόρφωση είναι εξαιρετικά μεγάλη και από άλλες διατάξεις του EC8 απαγορεύεται. Αν αναλογιστούμε δε το ίδιο κτίριο να είναι πολυώροφο, γίνεται ακόμα καλύτερα κατανοητή η ανάγκη ισχυρών υποστυλωμάτων.

5.3.4 Αξιολόγηση στρεπτικής συμπεριφοράς κτιρίου

Η σχέση μεταξύ του δακτύλιου αδράνειας της μάζας (C_M, I_s) και της έλλειψης δυστρεψίας (C_T, r_x, r_y) καθορίζει τον βαθμό δυστρεψίας του διαφραγματικού ορόφου. Η ιδανική θέση των δύο καμπυλών είναι η έλλειψη δυσκαμψίας να περιβάλλει τον δακτύλιο αδράνειας.



Δακτύλιος αδράνειας της μάζας (C_M, I_s) και έλλειψη δυστρεψίας (C_T, r_x, r_y)

Εφόσον έστω και σε ένα διαφραγματικό όροφο ενός κτιρίου $r_x < l_s$ ή $r_y < l_s$, τότε το σύστημα θεωρείται στρεπτικά εύκαμπτο [EC8 §5.2.2.1]. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι $r_x > l_s$ και $r_y > l_s$.

Για να είναι κανονικό σε κάτοψη ένα κτίριο θα πρέπει σε κάθε όροφο οι 2 στατικές εκκεντρότητες e_{ox} , e_{oy} να ικανοποιούν την συνθήκη $e_{ox} \leq 0.30r_x$ & $e_{oy} \leq 0.30r_y$ [EC8 §4.2.3.2]. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ισχύει ότι $e_{ox} = 0.94 \text{ m} \leq 0.30r_x (=0.30 \times 3.91 = 1.173 \text{ m})$ ενώ δεν ισχύει ότι $e_{ox} = 1.34 \text{ m} \leq 0.30r_x (=0.30 \times 3.08 = 0.924 \text{ m})$, άρα το κτίριο στο οποίο ανήκει ο συγκεκριμένος διαφραγματικός όροφος, δεν είναι κανονικό σε κάτοψη.

Για να επιτρέπεται απλοποιημένη σεισμική ανάλυση πρέπει σε κάθε διεύθυνση x,y να ισχύει:

$r_x^2 > l_s^2 + e_{ox}^2$, $r_y^2 > l_s^2 + e_{oy}^2$ [EC8 §4.3.3.1(8)d)]. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η πρώτη σχέση ισχύει, επειδή $3.91^2 (=15.3) > 2.81^2 + 0.94^2 (=7.9 + 0.9 = 8.8)$, ενώ η δεύτερη δεν ισχύει, επειδή $3.08^2 (=9.5) < 2.81^2 + 1.34^2 (=7.9 + 1.8 = 9.7)$, άρα στο κτίριο στο οποίο ανήκει ο συγκεκριμένος διαφραγματικός όροφος, δεν επιτρέπεται η απλοποιημένη σεισμική ανάλυση.

Παρατήρηση:

- Αν τα φορτία επί της πλάκας ήταν ομοιόμορφα διανεμημένα (§4.3.2), θα ήταν $l_s = 2.25 \text{ m}$ οπότε θα ίσχυε η τελευταία συνθήκη.

Υπενθυμίσεις:

Η θεωρία αυτή ισχύει για οποιαδήποτε περίπτωση τυχόντος ορόφου ενός πολυόροφου κτιρίου. Το μόνο που αλλάζει είναι ότι οι δυσκαμψίες έχουν ένα πολύπλοκο τρόπο υπολογισμού (πρακτικά αυτό μπορεί να γίνει μόνο με χωρική επίλυση).

Ο πίνακας των συντελεστών της ίδιας δυστρεψιάς (επαληθεύεται από την εξίσωση της §4.3.3.4)

d/b	1	1.5	2.0	3.0	4.0	6.0	10	∞
n	0.1404	0.196	0.229	0.263	0.281	0.299	0.313	0.333